Abschlussprüfung Berufskolleg

(Fachhochschulreife)

Prüfungsaufgaben aus Baden-Württemberg

Analysis

Ganzrationale Funktionen

Exponentialfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Jahrgänge 2010 bis 2014

Text Nr. 74310

Stand 3. April 2017

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text gehört zu einer Sammlung von Aufgaben, die in Baden-Württemberg für die Abschlussprüfung des **Berufskollegs** gestellt worden sind. Sie umfasst die Jahre 2002 bis 2016.
Diese Prüfung führt zur **Fachhochschulreife**.
Die Formulierung der Aufgaben wurde teilweise etwas verändert. Die Lösungen stammen nur von mir.

Folgende Texte gibt es bzw. sind in Planung

74302	Analysis – ganzrationale und e-Funktionen 2002 - 2009	
74305	Analysis – Trigonometrische Funktionen 2002 - 2009	
74310	**Analysis – (alles) 2010 – 2014**	**Dieser Text.**
74315	Analysis – (alles) ab 2015	
74321	Vektorgeometrie	
74331	Matrizenrechnung: wirtschaftliche Anwendungen	
74341	Stochastik	
74251	**Wirtschaftsrechnen: Kosten- und Gewinnfunktionen**	

Zum vorliegenden Text:

Diese Aufgaben sind zwar „nur“ für die Prüfung zur Fachhochschulreife gedacht, sind aber unbedingt für Klausuren an allen Arten von Gymnasien geeignet, da Grundlagenwissen abgeprüft wird!

Ich biete fast immer exakte Lösungen an, auch wenn es oft gestattet ist, die Ergebnisse mit einem GTR (Grafischen Taschenrechner) zu ermitteln. Das ist immer dann möglich, wenn es heißt „Bestimmen Sie .,..“ oder „Geben Sie an …“. Dies geschieht, damit die Lösungen für einen möglichst breiten Leserkreis brauchbar sind.

Lediglich Gleichungen z. b. 3. oder 4. Grades, zu denen es kein exaktes Lösungsverfahren in der Schule gibt, wurden daher immer mit einem GTR gelöst.
Zum Lösen von Gleichungssystem habe ich auch das Gaußsche Matrizen-Verfahren verwendet.

Ab und zu wurde auch der Screenshot eines CAS-Rechners verwendet,
Mein GTR ist CASIO fx CG 20.

Inhalt

Der Hinweis „Funktionenwissen“ soll bedeuten, dass hier eine Teilaufgabe so gestellt ist, dass man z. B. zu einem gegeben Schaubild Fragen zur zugehörigen nicht bekannten Funktion beantworten soll. das sind beliebte Aufgaben, die man überall einsetzen kann, auch zum Wissenstraining im Unterricht.

2010 – Aufgabe 1

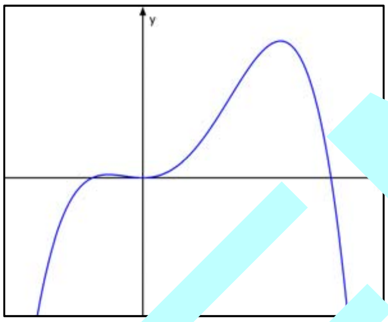
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_f.

1.1 Ermitteln Sie die Achsenschnittpunkte und die Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f.
Nennen Sie die Extremstellen einer Stammfunktion von f und begründen Sie Ihre Antwort.
(9 VP)

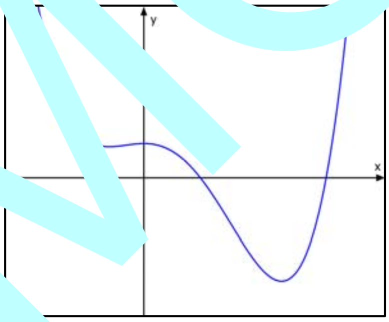
1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle x = -2.
Zeigen Sie, dass diese Tangente K_f auch an der Stelle x = 4 berü[illegible] (5 VP)

1.3 In dem Funktionsterm f(x) wird der Koeffizient $-\frac{1}{8}$ von x^3 ab[illegible]ndert.
Begründen Sie bei jedem der folgenden Schaubilder, dass e[illegible]icht zu dem geänder[illegible]
Funktionsterm gehören kann, wenn die anderen K[illegible]ffizienten [illegible]ich bleiben. (6 VP)

a)



b)



1.4 Geg[illegible] ist die [illegible]tion g m[illegible] $[illegible](x) [illegible] 3 \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
[illegible] Schaubild der F[illegible]on g, di[illegible]ade mit der Gleichung x = 3 und die Gerade mit der
[illegible]ichung y = 4 sowie [illegible]-Achse schließen eine Fläche ein.
Be[illegible]en Sie deren F[illegible]eninhalt. (4 VP)

1.5 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a - be^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$ und $a, b, c \neq 0$.
Das Schaubild von h geht durch den Ursprung und es gilt $h'(0) = h''(0)$.
Zeigen Sie, dass a = b und c = 1 ist.
Legen Sie einen Punkt fest, der auf dem Schaubild der Funktion h mit $h(x) = a - ae^x$ liegt
und berechnen Sie dann den Wert von a. (6 VP)

2010 – Aufgabe 2

2.1 Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Eine Polynomfunktion 4.Grades hat höchstens ______ Extremstellen, denn ihre Ableitung ist vom Grad ______.

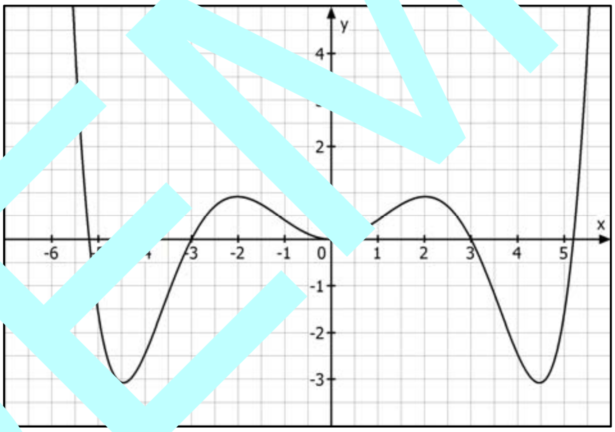
b) Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x + e^x$ ist monoton ____________________, denn ihre Ableitung ist stets ____________________.

c) Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ hat im Intervall [0;12] _____ Nullstellen und diese Funktion hat die Periode ________.

d) Das Schaubild der Funktion f_3 mit $f_3(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor _____ in y-Richtung und durch Verschiebung um __________ nach __________.

(8 VP)

2.2 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion.
Skizzieren Sie das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion in das untenstehende Koordinatensystem. (6 VP)



Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = \sin(x) + 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder sind K_f und K_g.

2.3 Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) K_f und K_g berühren sich auf der y-Achse.

b) K_f und K_g haben für $x < 0$ unendlich viele Schnittpunkte. (6 VP)

2.4 Eine Tangente an K_f geht durch den Ursprung. Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangente.

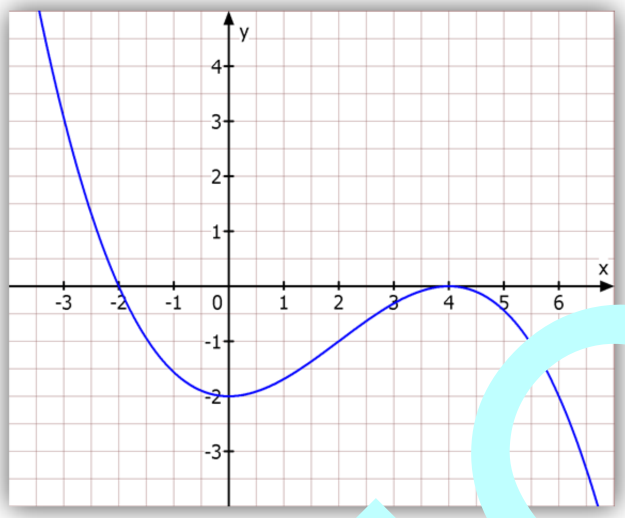
(4 VP)

2.5 K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{4}{\pi} \cdot x$ schneiden sich in $P\left(\frac{\pi}{2} \mid 2\right)$.

K_g und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die von dieser Geraden geteilt wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt der kleineren Teilfläche. Geben Sie das Ergebnis als Vielfaches von π an. (6 VP)

2010 – Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Polynomfunktion f:



3.1 Bestimmen Sie die Gleichung einer Polynomfunktio[illegible] n Scha[illegible] [illegible]rgestellten Kurve K_f übereinstimmt. (5 VP)

3.2 Entscheiden Sie, ob folgende Auss[illegible] [illegible]r oder falsc[illegible] sind. Be[illegible]nden Sie Ihre Entscheidung:

a) $f(-2) < 0$, [illegible] $f'(-2) < 0$ c) [illegible] $2) < 0$ (5 VP)

3.3 Gegeben ist die Fu[illegible]on g durch $\boxed{[illegible]) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{[illegible]}{8} [illegible] 2}$ mit $x \in \mathbf{R}$.
Das Schaubild vo[illegible]t K_g.
Welcher Zusammenh[illegible] [illegible]t zwischen d[illegible] Schaubildern K_f und K_g? (2 VP)

3.4 Gege[illegible] [illegible]tion h [illegible] $\boxed{h(x[illegible] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ mit $x \in [-6\,;6\,]$.
[illegible] Schaubild von h [illegible] K_h. Unte[illegible]en Sie K_h auf Symmetrie.
[illegible]timmen Sie die Per[illegible] von h.
Ge[illegible] Sie die Koordina[illegible] der Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse sowie die Koordinaten der Ext[illegible]punkte an (7 VP)

3.5 Die Gerade y [illegible] schließt mit K_h eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt mit Hilfe einer Stammfunktion. (5 VP)

3.6 Die Gerade x = u mit $-2 \le u \le 1$ schneidet K_g und K_h in P und Q. Für welchen Wert von u wird der Abstand der Punkte P und Q maximal? (6 VP)

Lösungen

Hauptprüfung 2010 – Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_f.

1.1 Ermitteln Sie die Achsenschnittpunkte und die Extrempunkte von K_f.

Manuelle Lösung

Nullstellen: $f(x)=0 \iff \frac{1}{32}x^4-\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2=0 \quad | \cdot 16$

$$\tfrac{1}{2}x^4-2x^3-6x^2=0$$

$$x^2\left(\tfrac{1}{2}x^2-2x-6\right)=0$$

Ein Nullprodukt ist Null, wenn ein Faktor Null ist:

1. Faktor: $x_1=0$, 2. Faktor: $\frac{1}{2}x^2-2x-6=0$

$$x_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-6)}}{2\cdot\frac{1}{2}}=2\pm4=\begin{cases}6\\-2\end{cases}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0\,|\,0)$, $N_2(6\,|\,0)$, $N_3(-2\,|\,0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_1(0\,|\,0)$

Ableitungen: $f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x$, $f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung. $f'(x)=0 \iff \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x=0 \quad | \cdot 8$

$$x^3-3x^2-6x=0$$

$$x\left(x^2-3x-6\right)=0$$

1. Faktor: $x_{E1}=0$ 2. Faktor: $x_{E2}=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}\approx\begin{cases}4{,}37\\-1{,}37\end{cases}$

y-Koordinaten:

$$y_{E1}=0$$

$$y_{E2}\approx f(4{,}37)\approx-6{,}2$$

$$y_{E3}\approx f(-1{,}37)\approx-0{,}27$$

Hinreichende Bedingung (Kontrolle): $f''(0)=-\frac{3}{4}<0 \Rightarrow$ Maximum

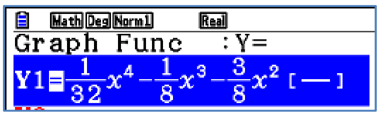
$f''(4{,}37)=\frac{3}{8}\cdot4{,}37^2-\frac{3}{4}\cdot4{,}37-\frac{3}{4}>0 \Rightarrow$ Minimum

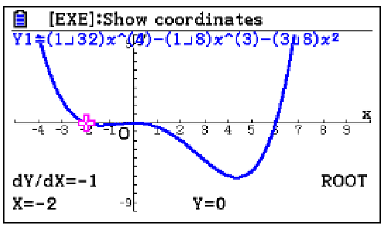
$f''(-1{,}37)=\frac{3}{8}\cdot1{,}37^2+\frac{3}{4}\cdot4{,}37-\frac{3}{4}>0 \Rightarrow$ Minimum

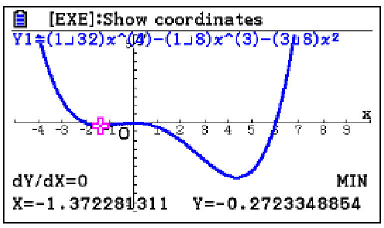
Ergebnis: Hochpunkt $H(0\,|\,0)$ Tiefpunkte: $T_1(4{,}37\,|\,-6{,}2)$, $T_2(-1{,}37\,|\,-0{,}27)$

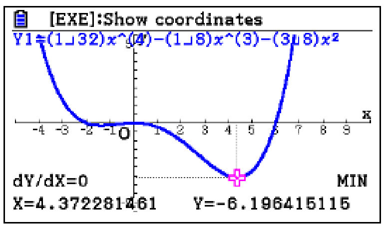
ACHTUNG: **Wenn die Verwendung eines Graphikrechners (GTR) gestattet ist,** sollte man ihn hier verwenden. Daher ist die Aufgabe auch schon so gestellt, dass es heißt „ermittle die Extrempunkte" und nicht „berechne sie".

Lösung mit dem Grafikrechner CASIO fx CD 20/40:

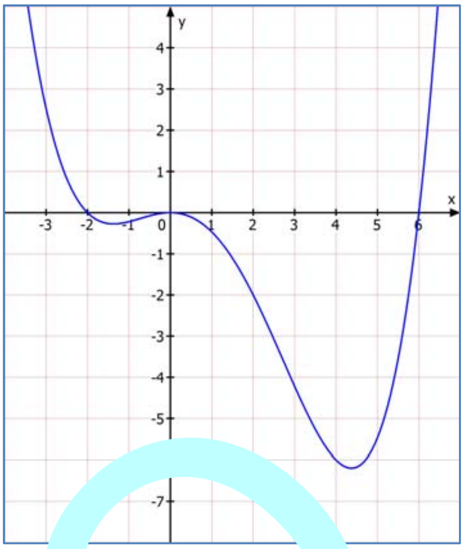








z. B. $N(-2\,|\,0)$ **usw.** $T_1(-1{,}37\,|\,-0{,}27)$ $T_2(4{,}37\,|\,-6{,}20)$ **usw.**



Zeichnung: K_f

Nennen Sie die Extremstellen einer Stammfunktion von f und begründen Sie Ihre Antwort.

Es sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt: $F'(x) = f(x)$

Für eine Extremstelle von F gilt: $F'(x) = 0$, also $f(x) = 0$.

Extremstellen von F sind also Nullstellen von f.

Aber nicht jede Nullstelle von f ist eine Extremstelle von F, denn es muss ein Vorzeichenwechsel vorliegen:

Es ist $f(-2) = 0$ und wegen

$f'(-2) = \frac{1}{8}\cdot(-8) - \frac{3}{8}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot(-2) = -1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -1 < 0$ liegt Vorzeichenwechsel vor.

Es ist $f(0) = 0$. Da aber bei $H(0\,|\,0)$ ein Hochpunkt vorliegt, gibt es keinen Vorzeichenwechsel.

Es ist $f(6) = 0$ und wegen $f'(6) = ... > 0$ liegt Vorzeichenwechsel vor.

Ergebnis: Die Extremstellen der Stammfunktionen liegen bei -2 und 6.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle x = –2.

Berührpunkt: $f(-2) = 0 \Rightarrow B(-2\,|\,0)$

Steigung: $f'(-2) = \frac{1}{8}\cdot(-8) - \frac{3}{8}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot(-2) = -1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -1$

Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form erstellen:

$$y - y_B = f'(x_B)(x - x_B) \Leftrightarrow y - 0 = -1\cdot(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 2$$

Zeigen Sie, dass diese Tangente K_f auch an der Stelle x = 4 berührt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies zu zeigen:

1. Möglichkeit: Man stellt die Tangente für x = 4 auf.

$f(4) = \frac{1}{32}\cdot 256 - \frac{1}{8}\cdot 64 - \frac{3}{8}\cdot 16 = 8 - 8 - 6 = -6 \Rightarrow C(4\,|\,-6)$

$f'(4) = \frac{1}{8}\cdot 64 - \frac{3}{8}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 = 8 - 6 - 3 = -1$

Tangentengleichung in C:

$y + 6 = -1\cdot(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 4 - 6 \Leftrightarrow y = -x - 2$

Und das ist auch die Gleichung der Tangente in B.

2. Möglichkeit: Man prüft nach, ob $C(4\,|\,-6)$ auf der Tangente in B liegt:

$-6 = -4 - 2$ ist eine wahre Aussage.

$f'(4) = \frac{1}{8}\cdot 64 - \frac{3}{8}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 = 8 - 6 - 3 = -1$ liefert die gleiche Tangentensteigung.

Also berührt diese Tangente auch in C.

3. Möglichkeit: Die Schnittgleichung von Tangente y = - x – 2 und Kurve liefert die Lösungen -2 und 4 doppelt: $\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 = -x - 2$

Leider ist diese Gleichung nur mit großem Aufwand lösbar.

Der Trick besteht jedoch darin, dass man ja zwei doppelte Lösungen kennt. Also sollte man wissen, dass man die Gleichung

$\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + x + 2 = 0$ auch so darstellen kann: $k(x+2)^2 \cdot (x-4)^2 = 0$

Und dies ist schnell gezeigt: Die linke Seite ergibt:

$$k \cdot \left(x^2 - 2x - 8\right)^2 = k \cdot (\underbrace{x^4 + 4x^2 + 64}_{\text{3 Quadrate}} \underbrace{- 4x^3 - 16x^2 + 32x)}_{\text{3 doppelte Pr}}$$

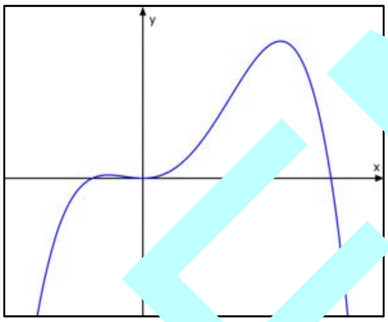
$$= k \cdot \left(x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64\right)$$

Und für $k = \frac{1}{32}$ ist alles klar.

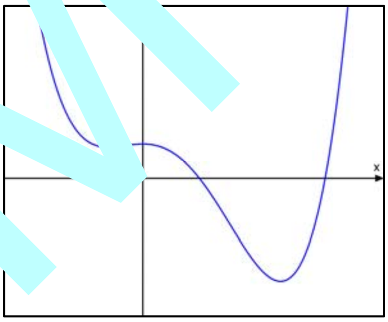
1.3 In dem Funktionsterm f(x) wird der Koeffizient $-\frac{1}{8}$ von x^3 a eändert.

Begründen Sie bei jedem der folgenden Schaubi r, dass e cht zu dem geänd en Funktionsterm gehören kann, wenn die anderen nten g bleiben

a)



b)



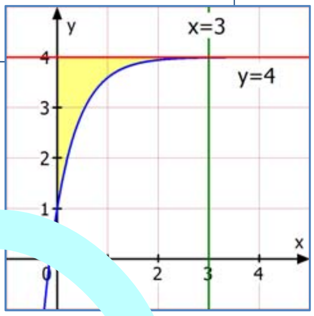
Es ist nun also: $f(x) = \frac{1}{32}x^4 + b \cdot x^3 - \frac{3}{8}x^2$

a) ss a) u f geh kann kennt man, wenn man das Verhalten von f für $x \to \infty$ bestim Dieses bekanntlich nur vom Summanden mit dem höchsten Koeffizienten bes mt. Und $\frac{1}{32}x^4 \to \infty$ für $x \to \infty$, was der Abbildung widerspricht.

b) a laut Gleichung $(0) = 0$ ist, passt dieses Schaubild nicht zu f. Denn dort ist $f(0) > 0$.

Teilaufgabe mit der Exponentialfunktion:

1.4 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 - 3 \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild der Funktion g, die Gerade mit der Gleichung x = 3 und die Gerade mit der Gleichung y = 4 sowie die y-Achse schließen eine Fläche ein.
Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.



$$A = \int_0^3 (4 - g(x))\,dx = \int_0^3 \left(4 - \left(4 - 3 \cdot e^{-2x}\right)\right)dx = \int_0^3 3 \cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= \left[3 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^3 = -\frac{3}{2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = -\frac{3}{2} \cdot \left[e^{-6} - e^0\right] = -\frac{3}{2}e^{-6} + \frac{3}{2} \approx 1{,}496 \text{ (FE)}$$

1.5 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a - be^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$ und ..., $c \neq 0$.
Das Schaubild von h geht durch den Ursprung und ... gilt $h'(\ldots = h''(0)$.
Zeigen Sie, dass a = b und c = 1 ist.

Ableitungen: $h'(x) = -bc \cdot e^{cx}$ $h''(x) = \ldots c^2 \cdot \ldots$

$h(0) = a - b \cdot e^0$ ... enn e ...
$h'(0) = -\ldots$ (2)
$h''(0\ldots bc^2$

Aus $h(0) = 0$ ergi... ch a ... $= 0 \Leftrightarrow a = \ldots$
Aus $h'(0) = h''(0)$ e... sich ... $bc = -bc^2$ | : (-bc)
$1 = c$

Le... Sie einen ... fest, de... Schaubild der Funktion h mit $h(x) = a - ae^x$ liegt
... berechnen Sie da... den Wer... on a.

De... ebige Punkt sei ... Q(1 | 3). Die Punktprobe liefert

$$\ldots a - a \cdot e^1 \Leftrightarrow 3 = a(1-e) \Leftrightarrow a = \frac{3}{1-e}$$

Oder man nimm... einen ganz beliebigen Kurvenpunkt $Q(u \mid v)$. Dann liefert die Punktprobe:

$$v = a - a \cdot e^u \Leftrightarrow v = a\left(1 - e^u\right) \Leftrightarrow a = \frac{v}{1 - e^u}$$

Hauptprüfung 2010 – Aufgabe2

2.1 Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Eine Polynomfunktion 4.Grades hat höchstens _3_ Extremstellen, denn ihre Ableitung ist vom Grad _3_.

b) Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x + e^x$ ist monoton _steigend_, denn ihre Ableitung ist stets _positiv_.

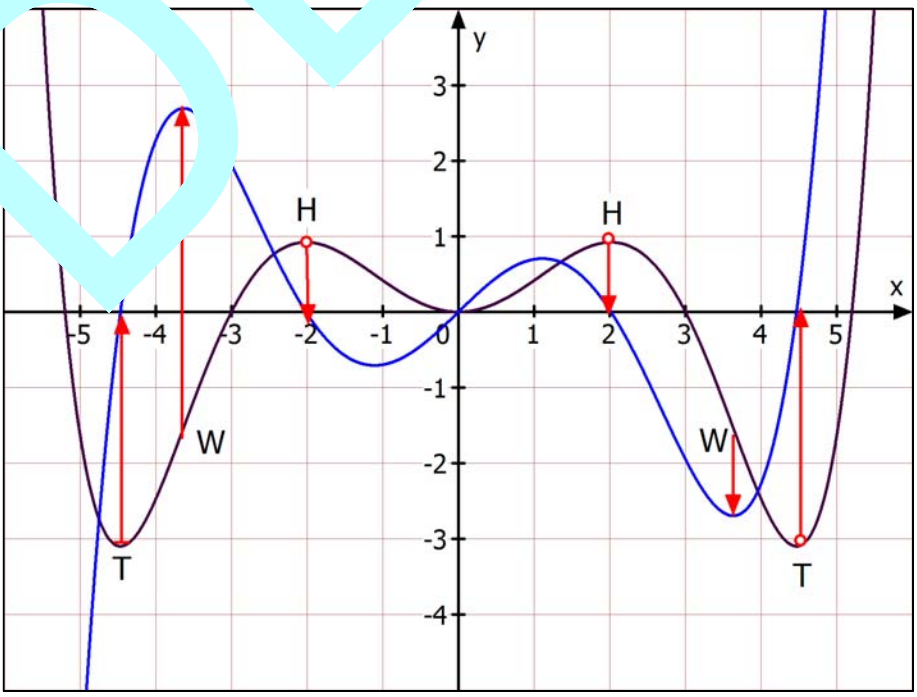
denn $f_1'(x) = 1 + e^x$

c) Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ hat im Intervall [0] _6_ Nu en und diese Funktion hat die Periode _4_.

denn die Kurve $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ entsteh us $y = c$) durch Streckun in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$. h urde au ichen Periode $p = 2\pi$ die neue Periode $k \cdot p =$ $\cdot 2\pi =$

d) Das Schaubild der Funktion f_3 n (x) os x $\frac{\pi}{}$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion f mit = cos(x) durch kung um . Faktor _2_ in y-Richtung und durch V niebung um 3 nach _li ._

2.2 Gegeben ist das Sch ld e Funktion. Ski ieren Sie das Schaubild ihrer Ableitungsf in das nstehende dinatensystem.



Die roten Pfeile erklären: Bei H oder T hat f' eine Nullstelle, bei W liegt die größte bzw. kleinste Steigung vor usw.

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit g(x) = sin(x) + 1 für $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder sind K_f und K_g

2.3 Begründen Sie folgende Aussagen:

a) K_f und K_g berühren sich auf der y-Achse.

b) K_f und K_g haben für x < 0 unendlich viele Schnittpunkte.

a) Ableitungen: $f'(x) = e^x$, $g'(x) = \cos(x)$

Auf der y-Achse gilt x = 0. $f(0) = e^0 = 1$ und $g(0) = \sin(0+1) = 0+1 = 1$

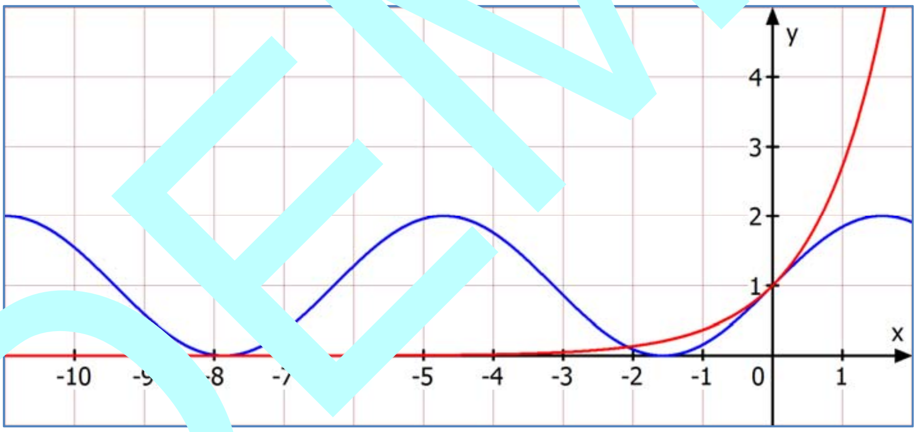
$f'(0) = e^0 = 1$ und $g'(0) = \cos(0) = 1$

Wegen $f(0) = g(0)$ und $f'(0) = g'(0)$ berühren sich die Kurven ... der y-...

b) Die Kurve K_f: $y = e^x$ schneidet die y-Achse im Punkt $P(0\,|\,1)$ ... ür $x \to -\infty$ nähert ... diese Kurve asymptotisch der negativen x-Achse. Sie verläuft als... r x < 0 im Horizontal... ifen $0 < y < 1$

Die Kurve K_g: y = sin(x) + 1 ist die um 1 nach obe... ...hobene ...skurve. Si... rläuft periodisch im Horizontalstreifen $0 \le y \le 2$ und hat in ...bs... l von 2π ...

Also schneiden sich K_g und K_f unendlich oft.



D... Schnittpunkte lieg... allerdings so dicht an (über) der x-Achse, dass man sie schon ... = 8 nicht ... erkennen kann.

2.4 Eine Tangen... K_f geht durch den Ursprung. Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangente.

Die Grundaufgabe „Lege von einem Punkt die Tangente an eine Kurve“ löst man mit dieser Methode:
Es sei $B(u\,|\,f(u))$ ein beliebiger Kurvenpunkt (der spätere Berührpunkt). Die Tangente in B hat diese Gleichung: $y - f(u) = f'(u)\cdot(x-u)$.

Diese Tangente soll durch den Ursprung gehen, d.h. es gilt die Bedingung:

$$\boxed{0} - f(u) = f'(u)\cdot(\boxed{0} - u) \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = u\cdot f'(u)$$

Ersetzt man f, dann heißt das: $e^u = u\cdot e^u \quad \Leftrightarrow \quad e^u - u\cdot e^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^u(1-u) = 0$

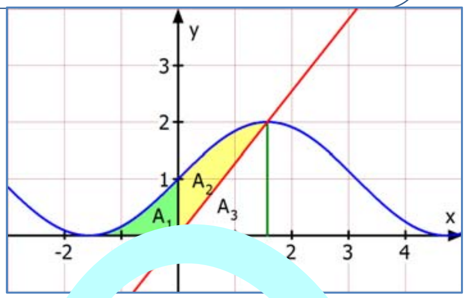
Da $e^u \neq 0$ folgt $u = 1$ und daher $f(u) = e$. Berührpunkt: $B(1\,|\,e)$.

Tangente: $y - e = e\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = ex$

2.5 K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{4}{\pi} \cdot x$ schneiden sich in $P\left(\frac{\pi}{2} \mid 2\right)$.

K_g und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die von dieser Geraden geteilt wird.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der kleineren Teilfläche. Geben Sie das Ergebnis als Vielfaches von π an.



K_g: $y = \sin(x) + 1$

1. Methode:

Man berechnet die beiden Teilflächen A_1 und A_2 und addiert ihre Inhalte:

$$A_1 = \int_{-\pi/2}^{0} \left[\sin(x)+1\right] dx = \left[-\cos(x)+x\right]_{-\pi/2}^{0} = \left[-\underbrace{\cos(0)}_{1}+0\right] - \left[\ldots\underbrace{\cos\left(-\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=0} - \tfrac{1}{2}\pi\right] = -1 \ldots \pi$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi/2} \left[\sin(x)+1-\tfrac{4}{\pi}x\right] dx = \left[-\cos(x)+x-\tfrac{2}{\pi}x^2\right]_{0} \ldots \underbrace{\ldots\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)} \ldots - \tfrac{2}{\pi} \cdot \tfrac{1}{4}\pi^2 - \left[\ldots \underbrace{\cos(0)}_{1}\right] = 1$$

Gesuchte Fläche:

$$A = A_1 + A_2 = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{(FE)}$$

2. Methode:

Man berechnet zuer[illegible]e große Flä[illegible] zwische[illegible] der x-Achse und der Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$.
Davon subtrahier[illegible] den Inh[illegible]es Dreiecks mit dem Inhalt A_3:

$$A_{gr} = \int^{\pi/2} \left(\sin(x)+1\right) dx \ldots \cos(x)+x\Big]^{\pi/2} \ldots \left[-\underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=0}+\tfrac{1}{2}\pi\right] - \left[-\underbrace{\cos\left(-\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=0}-\tfrac{1}{2}\pi\right] = \pi$$

Dr[illegible]ksinhalt:

$$\ldots = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \cdot 2 = \tfrac{1}{2}\pi$$

G[illegible]hte Fläche:

$$A = A \ldots A_3 = \pi - \tfrac{1}{2}\pi = \ldots$$

Hauptprüfung 2010 – Aufgabe3

3.1 Das Schaubild hat die typische Form einer Polynomfunktion 3. Grades.
Erkennbar sind folgende Eigenschaften:

1. $T(0\,|\,-2)$ ist Tiefpunkt (also mit waagrechter Tangente)
2. $H(4\,|\,0)$ ist Hochpunkt (also auch mit waagrechter Tangente)
3. $N(-2\,|\,0)$ ist Nullstelle.

Damit kann man die Funktionsgleichung auf zwei verschiedene Arten erstellen.

1. Möglichkeit: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ableitung: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

1. Bedingung:	$f(0) = -2$	d. h.	$d = -2$	(1)
2. Bedingung:	$f(4) = 0$	d. h.	$64a + 16b + 4c + d = 0$	(2)
3. Bedingung:	$f(-2) = 0$	d. h.	$-8a + 4b - 2c + d = 0$	(3)
4. Bedingung:	$f'(0) = 0$	d. h.	$c = 0$	(4)
5. Bedingung:	$f'(4) = 0$	d. h.	$48a + 8b + c = 0$	(5)

Hierin steckt ein kleines Problem: Für vier unbekannte Koeffizienten werden nur vier Gleichungen benötigt. **Die fünfte, also zusätzliche Gleichung muss aber auch erfüllt sein.**

Berechnung der Koeffizienten: Berücksichtigt man c = 0 und d = -2, dann folgt:

Aus (2): $64a + 16b - 2 = 0$ (2')

Aus (3): $-8a + 4b - 2 = 0$ (3')

Aus (5): $48a + 8b = 0$ (5')

Elimination von b:

$(3')\cdot 4$: $-32a + 16b - 8 = 0$ (3*)

(2')-(3*): $96a + 6 = 0 \Leftrightarrow 96a = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{16}$

In (3'): $-8\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) + 4b - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 4b - 2 = 0 \Leftrightarrow 4b = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{8}$

Die Probe in (5') stimmt (ganz wichtig!).

Ergebnis: $\boxed{f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - 2}$

2. Möglichkeit: Wenn man wie hier die Nullstellen kennt, kommt man mit dem Produktansatz schneller zum Ziel: $f(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-4)^2$

Denn -2 ist eine Nullstelle und 4 sogar eine doppelte (Berührpunkt der x-Achse!).

Den Streckfaktor a erhält man durch die Punktprobe mit dem Tiefpunkt $T(0\,|\,-2)$:

Aus $f(0) = -2$ und $f(0) = a\cdot 2\cdot 16 = 32a$ folgt $a = -\frac{1}{16}$ und daher:

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{16}(x+2)(x-4)^2}$$

3.2 Es geht um folgende **Eigenschaften:**

Zuerst mit anschaulichen Begründungen:

a) $f(-2)<0$: $f(-2)$ ist die y-Koordinate des Kurvenpunkts bei x = -2.
Weil K_f bei – 2 die x-Achse schneidet ist aber $f(-2)=0$: **falsch.**

b) $f'(-2)<0$ Damit wird die Steigung der Tangente im genanntem Schnittpunkt berechnet. Und weil diese fällt, ist die Aussage **wahr**.

c) $f''(-2)<0$ Die zweite Ableitung gibt an, ob sich eine Kurve nach links oder nach rechts krümmt. [$f''(x)<0$ gilt zu[illegible]em Hochpunkt. So kann man sich merken, dass ne[illegible]ves Vorzeichen [illegible]htskurve bedeutet). Es muss jedoch gelten: [illegible]$'(-2)>0$: **falsch.**

Man kann auch eine rechnerische Begründung l[illegible]efern.

Dazu benötigt man die in 3.1 erstellte Funktionsgle[illegible] $f(x)$ [illegible] $x^3+\frac{3}{8}x^2$ [illegible].

Wer die Lösung $f(x)=-\frac{1}{16}(x+2)(x-4)^2$ gefunde[illegible]at, [illegible]s sie zuerst so umformen:

$f(x)=-\frac{1}{16}\cdot(x+2)$ [illegible] $x^2-8x+16)$

$f(x)=-\frac{1}{16}\cdot(x^3-$ [illegible] $2x^2-16x$ [illegible] $32)$

$f(x)=-$ [illegible] x^3-6x [illegible] $)=-$ [illegible] 16 [illegible] x [illegible] 2

Dann folgen zwei Abl[illegible]ngen:

[illegible] $x)=-\frac{1}{16}($ [illegible] $12x)$ bzw. $f'($[illegible]$)=-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{4}x$

f [illegible] $x-12)$ bz[illegible] $f''(x)=-\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}$

Die V[illegible] ausge[illegible]merte[illegible]nstanten Faktor ist am einfachsten und reicht.
J[illegible]erst folgt die Ü[illegible]rüfung [illegible]ssagen:

a) $f(-2)=....=0$ [illegible]einfach ausrechnen) falsch!
b) [illegible] $-2)=-\frac{1}{16}(12$ [illegible] $)<0$ wahr.
c) $f''($ [illegible] $=-\frac{1}{16}($ [illegible] $-12)=-\frac{1}{16}\cdot(-24)=+\frac{24}{16}>0$ falsch!

3.3 Für diese Lösu[illegible] muss man den Funktionsterm wie in 3.2 gezeigt nach $f(x)=-\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{8}x^2-2$ umrechnen. Dann kann man mit $g(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2$ vergleichen.

Man muss erkennen, dass $g(x)=-f(x)$ ist.

Also entsteht das Schaubild K_g aus K_f durch Spiegelung an der x-Achse.

3.4 Es geht jetzt um $\boxed{h(x) = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ mit $x \in [-6\,;6\,]$.

a) $y = \cos(x)$ ist zur y-Achse symmetrisch.
Der Faktor $\frac{\pi}{4}$ besagt, dass das Schaubild um $k_1 = \frac{4}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt worden ist.
Dies ändert an der Symmetrie nichts.
Der Faktor 2 besagt, dass das Schaubild um $k_2 = 2$ in y-Richtung gestreckt worden ist.
Dies ändert an der Symmetrie auch nichts.
Folglich ist K_h auch symmetrisch zur y-Achse.

b) Durch die Streckung in x-Richtung hat K_h die Periode $\Delta x = \frac{4}{\pi}\cdot 2\pi = 8$.

c) Die Schnittpunkte mit der x-Achse kann man entweder ü die Strecku rmitteln oder durch Rechnung:

(1) Die Kurve $y = \cos(x)$ schneidet die x-Achse be $\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, ...
Durch die Streckung in x-Richtung lieg n bei K_h e Stellen jetzt
bei $\pm\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{\pi} = \pm 2$ bzw. $\pm\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{4}{\pi} = \pm$

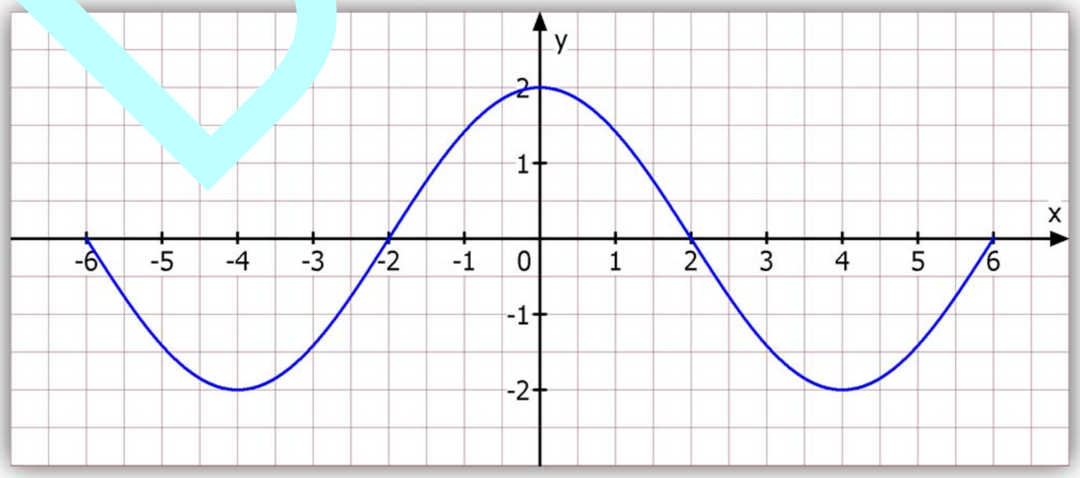
(2) Die Gleichung $h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right.$ cos
löst man über die Substitution $u = \frac{\pi}{4}x$: co $= 0$
mit den Lösungen $u_{1,2}$ $= \pm\frac{3}{2}\pi$,
Rücksubstitution mit $x =$ $\cdot\frac{4}{\pi} = \pm 2$ bzw. $x_{3,4} = \pm\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{4}{\pi} = \pm 6$

Ergebnis: $N_1(2$, $N_2(-2\,|\,0)$, $N_3($ $)$, $N_4(-6$ $)$,

d) Die Extrem kte liegen b ner Kosinusku immer zwischen diesen Schnittpunkten mit der x-Achs ür d Achse beach man den Streckfaktor $k_2 = 2$ für die y-Richtung.

$|2)$, $T_1($ $2)$ und T $4\,|-2)$

Das Sc bild war nicht ve gt:

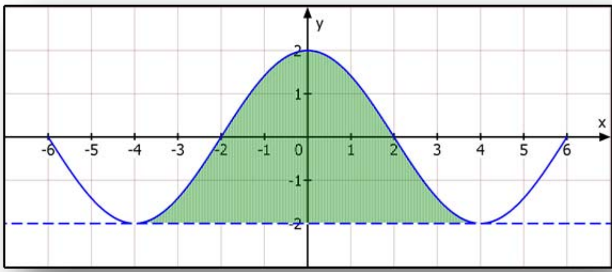


3.5 Flächenberechnung:

$$\mathbf{A} = 2\int_0^4 \left[2\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{4}x\right) - (-2)\right]dx =$$

$$\mathbf{A} = 2\cdot\left[\tfrac{8}{\pi}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}x\right) + 2x\right]_0^4$$

$$\mathbf{A} = 2\cdot\left[\tfrac{8}{\pi}\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + 8\right] = 16$$

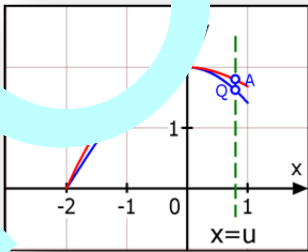


Ich habe hier die Fläche von x = 0 bis x = 4 berechnet. Wegen der Symmetrie von K_h ist das genau die halbe Fläche, daher der Faktor 2 vor dem Integral.

3.6 Die Gerade x = u mit $-2 \le u \le 1$ schneidet K_g und K_h in P und Q. Für welchen Wert von u wird der Abstand der Punkte P und Q maximal?

$$P(u\,|\,g(u)) = \left(u\,|\,\tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{3}{8}u^2 + 2\right)$$

$$Q(u\,|\,h(u)) = \left(u\,|\,2\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{4}u\right)\right)$$



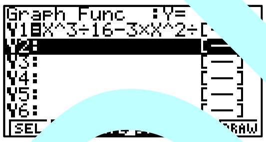
Wir entnehmen der Anschauung, dass $y_P \ge y_Q$ ist:

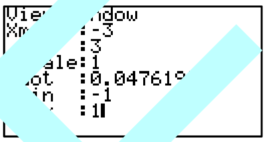
$$\overline{PQ} = L(u) = y_P - y_Q = \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{3}{8}u^2 + 2 - 2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}u\right)$$

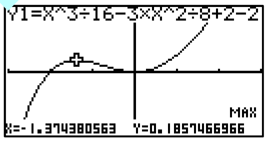
Definitionsbereich dieser Zielfunktion ist $[-2\,;1]$.

Für die rechnerische Lösung müsste man $L'(u) = 0$ lösen.

Diese Gleichung ist manuell nicht lösbar. Daher wird hier die Lösung mit dem GTR erlaubt:







Der GTR liefert ein Maximum für u ≈ -1,37 mit dem maximalen Längenwert L(-1,37) = 0,186.

Aber Vorsicht: Man muss noch die Randwerte betrachten:

Am linken Rand ist $L(-2) = 0$. Aber am rechten Rand passiert folgendes:

$$L(1) = \tfrac{1}{16} - \tfrac{3}{8} + 2 - 2\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 0{,}273$$

Das Maximum bei -1,37 ist also nur ein lokales (relatives) Maximum. Das absolute Maximum liegt am rechten Rand des Definitionsbereichs: $L(1) = 0{,}273$.